Edición 2025-2026

Ronda Final – Material para calificadores

Mayo de 2026

1. Las preguntas

1.1. Preguntas abiertas

¿Cuál es el dígito de las unidades de $1^1 + 2^2 + 3^3 + 4^4 + \cdots + 2026^{2026}$?

1.2. Preguntas cerradas

1. En el balón de fútbol que se popularizó en el mundial de Argentina 78 bajo el nombre *Tango Durlast* se aproximó la forma esférica con una configuración de 32 páneles, 20 hexágonos y 12 pentágonos, que por el material y el aire se curvan formando una figura casi esférica. ¿Cuántas costuras entre páneles tiene el balón?

2. Cinco personas están en una sala en la que hay dos hojas para registrar asistencia, una blanca y una verde. Lo que esas personas no saben es que las hojas se usarán además para formar comités, la hoja blanca el comité de actividades y la hoja verde el de alimentación, siendo líder de comité la persona que quede primera en la hoja, segunda persona en responsabilidades la que quede segunda en la lista y así sucesivamente. Si cada persona se registra exactamente una vez y es posible que una de las hojas quede en blanco, ¿de cuántas formas diferentes pueden quedar conformados los comités y asignadas las responsabilidades?

3. Dados dos números enteros positivos m y n, se construyen los números S, R, P y D que son, respectivamente, la suma, la resta (mayor menos menor) la multiplicación y la división (mayor dividido menor) de m y n y que resultaron ser enteros también. Si multiplicar P por D tiene como resultado 20 veces la suma de S y R, mientras la división $\dfrac{P}{D}$ es 10 veces la resta $S - R$, ¿cuál es el valor de P?

4. Un reloj digital de mesa porgramado en modo 24 horas, de esos que muestran la hora con cuatro dígitos gigantes empezando el día con 00:00 y con momentos de 17:08 y similares, fue conjfigurado en forma errada, por lo que se salta cualquier hora en la que tenga que mostrar al menos un 3. Es decir, el reloj empieza el día con 00:00, el siguiente minuto es 00:01, el siguiente 00:02 y el siguiente a eso 00:04, aunque la hora correcta debió ser 00:03 pero el reloj no lo puede marcar. Si el reloj empieza bien un día, mostrando 00:00, ¿cuántos minutos más adelante está la hora mostrada respecto a la hora real 24 horas más tarde?

5. Encuentre el área de un rectángulo que cumpla las siguientes condiciones:

   - El lado menor mide 30 unidades,
   - La diferencia de longitud entre el lado meyor y el menor es la misma diferencia de longitud entre el lado mayor y la diagonal.

2. Solución pregunta abierta

Para iniciar, notemos que la pregunta sobre el dígito de las unidades permite reducir las operaciones de suma y multiplicación a un enfoque directo a dígito de las unidades. Es decir, si se busca el dígito de las unidades de la operación 1,018,460,838 + 80,201,487, basta con calcular el dígito de las unidades de $8 + 7$, con resultado 5; de la misma forma para la multiplicación, el dígito de las unidades de 6,013,394,949 × 52,259,663 es el mismo de 9×3, que en este caso es 7.

Este proceso se puede aplicar para enfocarse solo en el dígito de las unidades de las potencias. Así, es válido y útil afirmar que si un número tiene 1 como dígito de las uniades, todas sus potencias tienen también 1 como dígito de las unidades. En la misma forma, los números que tienen 5 como dígito de las unidades tienen también 5 en las unidades de sus potencias, los números que tienen 6 como dígito de las unidades también lo tienen en las unidades de sus potencias, los que tienen 0 en las unidades también tienen 0 en las unidades de sus potencias.

Para los otro números, veamos los dígitos de las unidades de sus potencias. Tomemos como referencia las potencias de 7 para mostrar cómo podemos reducir siempre el proceso a ver los dígitos de las uniandes.

$7^2 = 49$, tiene 9 como dígito de las unidades. Para encontrar el dígito de las unidades de 7^3 basta notar que $7^3 = 7 \times 7^2$, por lo que su dígito de las unidades es el mismo de 7×9, es decir, 3. En el caso de 7^4, considerando que $7^4 = 7 \times 7^3$, el dígito de las unidades es el mismo de 7×3, 1. El proceso se puede continuar, notanto que se forma un ciclo.

El mismo proceso que hicimos para 7 se puede hacer con cualquier dígito en las unidades, por lo que podemos construir la tabla 1:

	Dígito unidades número origial									
Exponente	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
2	1	4	9	6	5	6	9	4	1	0
3	1	8	7	4	5	6	3	2	9	0
4	1	6	1	6	5	6	1	6	1	0
5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
6	1	4	9	6	5	6	9	4	1	0
7	1	8	7	4	5	6	3	2	9	0
8	1	6	1	6	5	6	1	6	1	0
9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
10	1	4	9	6	5	6	9	4	1	0
11	1	8	7	4	5	6	3	2	9	0
12	1	6	1	6	5	6	1	6	1	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Cuadro 1: Dígitos de las unidades de las potencias de enteros

Observando la tabla, columna por columna, podemos notar que todos los números tienen ciclos en los dígitos de las unidades de sus respectivas potencias, siendo posible que todos los dígitos en la columna sean el mismo (1, 5, 6 y 0), que los ciclos solo involucren dos números (caso 4 y 9) o que los ciclos involucren cuatro números (casos 2, 3, 7 y 8). En todo caso, los dígitos de las unidades se repiten cada cuatro potencias, con total seguridad.

Para combinar esto con el problema, vemos que los dígitos de las unidades en los números base del problema tienen un ciclo de diez, es decir, aparece una potencia de número terminado en 1, luego una de número terminado en 2, luego una de número terminado en 3 y así sucesivamente hasta llegar a potencia de número terminado en 0 y volver a empezar. Este ciclo y el ciclo de los dígitos de las potencias se hacen compatibles en un gran ciclo de longitud veinte. Es decir, se puede garantizar que los dígitos de unidades involucrados en la suma

$$1^1 + 2^2 + 3^3 + 4^4 + \cdots + 19^{19} + 20^{20}$$

son exactamente los mismos, con mismo resultado de suma, que los involucrados en

$$21^{21} + 22^{22} + 23^{23} + 24^{24} + \cdots + 39^{39} + 40^{40}$$

y a la vez son los mismos de la suma

$$41^{41} + 42^{42} + 43^{43} + 44^{44} + \cdots + 59^{59} + 60^{60},$$

y así sucesivamente, que además podemos calcular aprovechando el ciclo del dígito de las unidades en las potencias cada vez que el exponente crece en cuatro unidades, para decir que esos dígitos son exactamente

$$1+4+7+6+5+6+3+6+9+0+1+6+3+6+5+6+7+4+9+0$$

que tiene como resultado, solo enfocando el dígito de las unidaqdes, 4.

La suma original del enunciado, $1^1+2^2+3^3+4^4+\cdots+2026^{2026}$, se puede ver como 101 bloques de los referidos en el párrafo anterior, sumados a los dígitos de las unidades de 2021^{2021}, 2022^{2022}, 2023^{2023}, 2024^{2024}, 2025^{2025} y 2026^{2026}. Esto, utilizando lo que sabemos sobre los ciclos de los dígitos de las unidades cada cuatro potencias y el enfoque en solo dígitos de las unidades, nos dice que el resultado que estamos buscando es el dígito de las unidades de

$$4\times 101+1^1+2^2+3^3+4^4+5^1+6^2,$$

que se reduce, por el enfoque directo al dígito de las unidades, a encontrar el dígito de las unidades de

$$4+1+4+7+6+5+6,$$

dando como resultado final al problema el número **3**.

3. Elementos de calificación

3.1. Criterios pregunta abierta

- (+1 punto) Enunciar que toda la operación se puede reducir, en cada paso, a observar solamente dígitos de uniades en cada paso.
- (+1 punto) Mencionar, para al menos uno de los dígitos 1, 5, 6 o 0, que si un número tiene ese –esos– dígitos como dígito de las unidades, sus potencias también lo –los– tendrán.
- (+1 punto) Enunciar la propiedad del ciclo de longitud 2 para los dígitos de las unidades de las potencias de al menos uno de los dígitos de unidades 4 o 9.
- (+2 puntos) Enunciar la propiedad de los ciclos de longitud 4 para al menos uno de los casos en que el dígito de las unidades de la base es 2, 3, 7 u 8. *Nota*: si un estudiante enuncia que para cualquier dígito de las unidades los dígitos de las unidades de sus potencias tienen ciclo de longitud 4, se dan los +4 puntos anteriores como conjunto.
- (+3 puntos) Usar la información para afirmar que en la suma pedida en el enunciado, reducida a dígitos de las unidades, se puede reunir la mayor parte de los sumandos en grupos idénticos, como los de veinte números de la solución mostrada. (También sería posible, por ejemplo, afirmar que hay 203 números que vienen de 1 en las unidades y por tanto son 1 en la suma, 102 que son potencia de número terminado en 2 que va a terminar en 4, 101 que son 6 como resultado de potencia de 2 que va a terminar en 6 y así sucesivamente).
- (+1 punto) Construir la suma final sobre la que se va a calcular, en formna efectiva, el valor del dígito buscado en el enunciado.
- (+1 punto) Concluir.

3.2. Respuestas preguntas cerradas

1. **090**
2. **720**
3. **400**
4. **840**
5. **600**